

Splątanie kwantowe i jego zastosowania

1050-FT000-MSP-OSKZ

zadania zaliczeniowe

Wojciech Bruzda

2026-01-11, CFT PAN, Warszawa

Zestaw I

I.1 Zapisać stan

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B \right) \quad (1)$$

w bazie obliczeniowej, gdzie $|\mp\rangle_X = (|0\rangle_X \mp |1\rangle_X)/\sqrt{2}$ dla $X \in \{A, B\}$.

I.2 Dany jest stan czysty

$$|\psi\rangle_{AB} = |00\rangle_{AB} + |01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad (2)$$

zapisany w standardowej bazie produktowej przestrzeni dwóch qubitów. Proszę znormalizować ten stan, a następnie zapisać go w postaci Schmidta.

I.3 Wyznaczyć macierz gęstości stanu czystego

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|00\rangle_{AB} - |11\rangle_{AB} + i|12\rangle_{AB} \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3, \quad (3)$$

zapisanego w bazach obliczeniowych $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A \subset \mathbb{C}^2$ oraz $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}_B \subset \mathbb{C}^3$. Następnie policzyć zredukowane macierze gęstości $\rho_A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ oraz $\rho_B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Sprawdzić, czy wyniki faktycznie przedstawiają poprawne macierze gęstości.

Baza obliczeniowa w wyższych wymiarach jest odpowiednikiem bazy kanonicznej, tj.

$$|j\rangle = [0, \dots, \overset{(j+1)}{1}, \dots, 0]^T \in \mathbb{C}^d \quad \text{dla } j \in \{0, 1, \dots, d-1\}. \quad (4)$$

I.4 Sprawdzić, czy podany stan

$$\rho = \begin{bmatrix} 5/12 & -\frac{1}{3} - \frac{i}{4\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{i}{4\sqrt{3}} & 7/12 \end{bmatrix} \quad (5)$$

jest czysty. Jeżeli nie, to wyznaczyć dowolną puryfikację tego stanu.

I.5 Rozwiązać równanie własne dla macierzy Pauliego Y, ale w notacji bra-ket! Następnie policzyć wartości oraz wektory własne macierzy $X \otimes Y$, pamiętając, że $X|\mp\rangle = \mp|\mp\rangle$.

Zestaw II

II.1 Dany jest qubitowy pomiar rzutowy

$$\mathcal{M} = \left\{ |-\rangle\langle-|, |+\rangle\langle+| \right\}. \quad (6)$$

Upewnić się, że \mathcal{M} spełnia definicję rzutowego pomiaru kwantowego, a jeśli tak, to wykonać pomiar na stanie

$$|\psi\rangle = i\sqrt{\frac{1}{6}}|0\rangle - \sqrt{\frac{5}{6}}|1\rangle. \quad (7)$$

II.2. Dany jest zbiór macierzy

$$M_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Upewnić się, że definiują one poprawny pomiar kwantowy oraz obliczyć prawdopodobieństwa otrzymania odpowiednich wyników (reguła Borna) w stanie mieszanym

$$\rho = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Otrzymane prawdopodobieństwa powinny sumować się do jedności.

II.3 Sprawdzić/wykazać, że podany stan jest separowalny:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2. \quad (10)$$

II.4 Sprawdzić dowolną metodą (dekompozycja Schmidta, entropia von Neumanna, itp.), czy podany stan jest splątany:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|00\rangle - |10\rangle + |11\rangle \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2. \quad (11)$$

II.5 Niech $p \in [0, 1]$. Obliczyć miarę *concurrence* dla stanu

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|\Phi_2^+\rangle + \sqrt{1-p}|01\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2, \quad (12)$$

gdzie $|\Phi_2^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.

Zestaw III

I.2 Sprawdzić, czy macierze Krausa

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

dla $\gamma \in [0, 1]$, poprawnie definiują mapę kwantową (warunek zachowania śladu).

II.2 Wykazać, że $ZX = \omega XZ$ dla uogólnionych macierzy Pauliego

$$X = \sum_{j=0}^{d-1} |j \oplus 1\rangle \langle j|, \quad Z = \sum_{j=0}^{d-1} \omega^j |j\rangle \langle j| \quad : \quad \omega = \exp \frac{2i\pi}{d}. \quad (14)$$

III.3 Z badać (numerycznie) splątanie/separowalność poniższego stanu (gdzie kropki zastępują zera) korzystając z kryterium PPT

$$\rho = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & i & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & 1 & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & i & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3. \quad (15)$$

III.4 Sprawdzić, czy podany zestaw generatorów:

$$\begin{cases} g_1 = X \otimes Z \otimes Z \\ g_2 = Z \otimes X \otimes Z \\ g_3 = Z \otimes Z \otimes X \end{cases} \quad \text{stabilizuje stan} \quad (16)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle). \quad (17)$$

proszę rozwiązać zadanie III.5a lub III.5b – do wyboru :)

punkty za te dwa zadania nie sumują się, więc w przypadku dostarczenia dwóch rozwiązań ilość punktów zostanie naliczona według wzoru

$$p(\text{III.5}) = \min \{p(\text{III.5a}), p(\text{III.5b})\}$$

III.5a Dana jest szczególna (elegancka) nierówność Bella, której funkcjonal \mathbb{B} jest zapisany jako

$$\mathbb{B} = a_1(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) + a_2(b_1 - b_2 + b_3 - b_4) + a_3(b_1 - b_2 - b_3 + b_4). \quad (18)$$

Wiedząc, że klasyczne zmienne losowe a_j oraz b_k mogą przyjmować wyłącznie wartości ∓ 1 , wyznaczyć największą możliwą wartość \mathbb{B} .

Można sprawdzić numerycznie wszystkie możliwości, ale szczególnie mile widziane są te rozwiązania, które uzasadnią w sposób niesiłowy, że dana wartość faktycznie jest maksymalna.

III.5b Wiadomo, że stany

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad \text{oraz} \quad |\text{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (19)$$

nie są lokalnie unitarnie równoważne w przestrzeni $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Wyznaczyć globalną macierz unitarną $U \in \mathbb{U}(8)$ taką, że $U|\text{GHZ}\rangle = |\text{W}\rangle$.

Podpowiedź #1: Zacząć od ustalenia bazy kanonicznej w przestrzeni trzech qubitów: $\{|0\rangle = |000\rangle, |1\rangle = |001\rangle, |2\rangle = |010\rangle, \dots, |7\rangle = |111\rangle\}$. Następnie zauważyć, że $|a_0\rangle \equiv |\text{GHZ}\rangle \propto |0\rangle + |7\rangle$ oraz $|b_0\rangle \equiv |\text{W}\rangle \propto |1\rangle + |2\rangle + |4\rangle$. Na tej podstawie (przy pomocy ortogonalizacji Grama-Schmidta) zbudować z bazy kanonicznej kolejne wektory $|a_j\rangle$ oraz $|b_k\rangle$ tak, aby zbiory $\{|a_j\rangle\}$ oraz $\{|b_k\rangle\}$ stały się bazami ortonormalnymi w przestrzeni $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Poszukiwana macierz U ma postać

$$U = \sum_{j=0}^7 |b_j\rangle\langle a_j|, \quad (20)$$

która oczywiście nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny! Jak należy zinterpretować tę macierz?

Podpowiedź #2: Procedurę ortogonalizacji GS można zastosować z powodów formalnych – wtedy zadanie po prostu samo się rozwiązuje, ale można też “odgadnąć”, a następnie porządnie uzasadnić postać macierzy U .