

Splątanie kwantowe i jego zastosowania

materiały dodatkowe do wykładu dla studentów Politechniki Warszawskiej (1050-FT000-MSP-OSKZ)

Wojciech Bruzda

<https://chaos.if.uj.edu.pl/~wojtek/teaching>

<https://wojtek.cft.edu.pl/teaching>

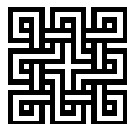
2025/11/24

Spis treści

1	Przykłady rachunkowe	2
1.1	diagonalizacja macierzy #1	3
1.2	diagonalizacja macierzy #2	4
1.3	częściowy ślad układu $3 \otimes 2$	5
1.4	częściowy ślad układu $2 \otimes 3$	7
1.5	faktoryzacja stanu w układzie $2 \otimes 3$	10
1.6	dekompozycja Schmidta $2 \otimes 2$	11
1.7	dekompozycja Schmidta $2 \otimes 3$	12
1.8	puryfikacja stanu mieszanego	13
1.9	macierze Pauliego X, Y, Z	14
1.10	entropia von Neumanna – przypadek quditowy	16
1.11	pomiar kwantowy rzutowy – przykład	17
1.12	bramki kwantowe wieloqubitowe	18
1.13	protokół kwantowej teleportacji qubitu (dygresja fizyczna)	21
1.14	reprezentacja środowiskowa mapy kwantowej	25
1.15	stan $ \text{GHZ}\rangle \in 2 \otimes 2 \otimes 2$	26
1.16	miary splątania kwantowego \mathcal{C} oraz τ	28

1 Przykłady rachunkowe

Poniższe przykłady mają za zadanie oswoić czytelnika z żargonem oraz stylem zapisu wyrażeń matematycznych używanym w środowisku “informatyków kwantowych”, a przede wszystkim ze sposobami obliczania częściowego śladu oraz diagonalizacji macierzy, które pojawiają się w większości problemów. Użyta metoda zapisu przy wykorzystaniu notacji Diraca jest bardzo wygodna, wymaga jednak uwagi, gdyż wiele rzeczy zależy od kontekstu i użyte skróty myślowe z formalnego punktu widzenia mogą być słusznie uznane za niepoprawne.



Definicje wszystkich obiektów są przedstawione na właściwym wykładzie. Jako formalny wstęp do pojęć algebraicznych poleca się obszerny podręcznik Jacka Gancarzewicza, [Algebra liniowa i jej zastosowania](#) (2004).

1.1 diagonalizacja macierzy #1

Poniższe obserwacje nie wnoszą absolutnie nic ciekawego do algebry i stanowią jedynie przygotowanie do dalszych bardziej konkretnych obliczeń. Na początek rozważmy pewną macierz hermitowską

$$\rho_{AB} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & i & -i & 0 \\ -i & 1 & -1 & 0 \\ i & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Zauważamy, że macierz ρ_{AB} jest macierzą rzędu jeden, gdyż cztery kolejne operacje liniowe na kolumnach (c) oraz wierszach (r):

$$c_2 + c_3 \mapsto c_3 \quad (2)$$

$$r_2 + r_3 \mapsto r_3 \quad (3)$$

$$-ic_1 + c_2 \mapsto c_2 \quad (4)$$

$$ir_1 + r_2 \mapsto r_2 \quad (5)$$

sprowadzają ρ_{AB} do postaci projektora $|00\rangle\langle 00|$, co oznacza, że widmo tej macierzy ma trzy zerowe wartości własne oraz jedną wartość własną równą jedności, $\text{eig}(\rho_{AB}) = \{[0]^3, 1\}$. Właściwie macierz ρ_{AB} w tym momencie została już zdiagonalizowana, ale prześledźmy to dokładniej.

Przykładowy znormalizowany wektor własny odpowiadający wartości własnej 1 ma postać

$$[a, b, c, d]^T = \frac{1}{\sqrt{3}}[-i, -1, 1, 0]^T, \quad (6)$$

ponieważ równanie własne $\rho_{AB}[a, b, c, d]^T = [a, b, c, d]^T$ jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} a + ib - ic & = 2a + a \\ -ia + b - c & = 3b \\ ia - b + c & = 3c \end{cases} \implies \begin{cases} b & = -c \\ -ic & = a. \end{cases} \quad (7)$$

Zerowej wartości własnej (która jest potrójnie zdegenerowana) odpowiadają trzy liniowo niezależne wektory, których komponenty spełniają warunki

$$\begin{cases} a + ib - ic & = 0 \\ d & \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8)$$

W tym momencie warunków tych nie trzeba wyznaczać, gdyż rozkład własny, z uwagi na macierz diagonalną składającą się z jednej niezerowej wartości własnej, wycina z macierzy przejścia P jedynie pierwszą kolumnę – tę (umownie) odpowiadającą jednostkowej wartości własnej, tj.

$$\rho_{AB} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -i & * & * & * \\ -1 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i & -1 & 1 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{P^\dagger} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

gdzie pojedyncze kropki \cdot oznaczają dla przejrzystości zera, a gwiazdkami $*$ oznaczono elementy macierzy przejścia P , które są nieistotne.

Można więc przyjąć, że poszukiwany stan czysty, który definiuje macierz $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|_{AB}$ wyraża się jako

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-i, -1, 1, 0]^T, \quad (10)$$

ale nie jest to jedyny taki wektor, ponieważ wektory własne są wyznaczone z dokładnością do stałej multiplikatywnej.

1.2 diagonalizacja macierzy #2

Niech M będzie rzeczywistą macierzą symetryczną

$$M = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Każda macierz symetryczna jest normalna, tj. $[M, M^\dagger] = 0$, zatem jest diagonalizowalna, czyli istnieje¹ taka baza przestrzeni \mathbb{C}^3 , w której macierz M ma postać diagonalną złożoną z wartości własnych macierzy M .

Rozwiązując równanie własne $Mv = \lambda v$ otrzymujemy (niezdegenerowane = niepowtarzające się) wartości własne $\lambda \in \text{eig}(M) = \{-6, -3, 2\}$ oraz odpowiadające im znormalizowane² (tu rzeczywiste) wektory własne:

$$v_{-6} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Zatem macierz M może być zapisana jako

$$M = \sum_{\lambda} \lambda v_{\lambda} v_{\lambda}^T = \sum_{\lambda} \lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| \quad (13)$$

$$= -6 \underbrace{\begin{bmatrix} 4/6 & 2/6 & -2/6 \\ 2/6 & 1/6 & -1/6 \\ -2/6 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}}_{v_{-6} v_{-6}^T} - 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{v_{-3} v_{-3}^T} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{v_2 v_2^T} \quad (14)$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

lub, równoważnie, przy pomocy macierzy przejścia P do bazy diagonalnej,

$$P = \left[v_{-6} \mid v_{-3} \mid v_2 \right] = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

czyli $M = P \cdot \text{diag}([-6, -3, 1]) \cdot P^\dagger$. Jest to tzw. rozkład własny (dekompozycja spektralna) macierzy diagonalizowalnej. Używa się też stwierdzenia rozkład Jordana, który z formalnego punktu widzenia jest czymś bardziej ogólnym i stosowanym do macierzy, które niekoniecznie są diagonalizowalne, ponieważ nie każda macierz jest diagonalizowalna. Jednakże my będziemy rozważać głównie takie macierze, które da się sprowadzić do postaci diagonalnej (hermitowskie macierze gęstości). Przykładem macierzy niediagonalizowalnej jest:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

czyli tzw. dwuwymiarowa klatka Jordana.

Zwróćmy uwagę na uproszczony zapis dekompozycji spektralnej w notacji Diraca widoczny we wzorze (13), gdzie index λ “numeruje” wektor własny $|\lambda\rangle$ odpowiadający rzeczywistej wartości własnej λ .

¹Przypominamy, że reprezentacja macierzy zależy od wyboru bazy przestrzeni. W różnych bazach macierz będzie przyjmować inną postać. My najczęściej będziemy korzystać z bazy obliczeniowej (kanonicznej).

²Istotna jest ciągle powtarzana fraza: “znormalizowane wektory”. Brak normalizacji spowoduje błędny rozkład macierzy, a w dalszej konsekwencji niepoprawną interpretację wektorów stanu.

1.3 częściowy ślad układu $3 \otimes 2$

Rozważmy dwie (pod)przestrzenie \mathbb{C}^3 oraz \mathbb{C}^2 będące podukładami złożonego układu fizycznego $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$. Będziemy używali też alternatywnego zapisu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = A \otimes B$, a także zupełnie uproszczonej formy: $3 \otimes 2$. Zapis z indeksami przydaje się szczególnie, gdy trzeba rozróżnić, który ket należy do właściwej podprzestrzeni w momencie, gdy jest kolizja indeksów (tak, jak ma to miejsce poniżej).

W każdej podprzestrzeni wybieramy dwie bazy obliczeniowe/kanoniczne (ONB)³:

$$\left\{ |0\rangle_A = [1, 0, 0]^T, \quad |1\rangle_A = [0, 1, 0]^T, \quad |2\rangle_A = [0, 0, 1]^T \right\} \subset \mathbb{C}^3, \quad (18)$$

$$\left\{ |0\rangle_B = [1, 0]^T, \quad |1\rangle_B = [0, 1]^T \right\} \subset \mathbb{C}^2. \quad (19)$$

Rozważmy nieznormalizowany stan⁴ dwucząstkowy zapisany na cztery różne ale równoważne sposoby, z których ostatni jest najpopularniejszy:

$$|\tilde{\psi}\rangle_{AB} = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |2\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B = \quad (20)$$

$$= |0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B - |2\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B = \quad (21)$$

$$= |01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB} - |21\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB} = \quad (22)$$

$$= |01\rangle + |10\rangle - |21\rangle + |11\rangle. \quad (23)$$

W ostatniej linijce pominięto nawet indeksy podukładów, gdyż już pamiętamy, że pierwszy ket jest z przestrzeni \mathbb{C}^3 , a drugi z \mathbb{C}^2 . Zapiszmy ten stan w postaci wektorowej

$$|\tilde{\psi}\rangle_{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \quad (24)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^6. \quad (25)$$

Łatwo sprawdzić, że $\| |\tilde{\psi}\rangle_{AB} \|_F = 2$, zatem po znormalizowaniu stan przyjmuje postać

$$|\tilde{\psi}\rangle_{AB} \longrightarrow |\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{2} [0, 1, 1, 1, 0, -1]^T = \frac{1}{2} (|01\rangle + |10\rangle - |21\rangle + |11\rangle). \quad (26)$$

Macierz gęstości ρ_{AB} , odpowiadająca stanowi $|\psi\rangle_{AB}$ jest postaci

$$|\psi\rangle_{AB} \langle \psi| = \frac{1}{4} |01\rangle \langle 01| + \frac{1}{4} |01\rangle \langle 10| - \frac{1}{4} |01\rangle \langle 21| + \frac{1}{4} |01\rangle \langle 11| \quad (27)$$

$$+ \frac{1}{4} |10\rangle \langle 01| + \frac{1}{4} |10\rangle \langle 10| - \frac{1}{4} |10\rangle \langle 21| + \frac{1}{4} |10\rangle \langle 11| \quad (28)$$

$$- \frac{1}{4} |21\rangle \langle 01| - \frac{1}{4} |21\rangle \langle 10| + \frac{1}{4} |21\rangle \langle 21| - \frac{1}{4} |21\rangle \langle 11| \quad (29)$$

$$+ \frac{1}{4} |11\rangle \langle 01| + \frac{1}{4} |11\rangle \langle 10| - \frac{1}{4} |11\rangle \langle 21| + \frac{1}{4} |11\rangle \langle 11|. \quad (30)$$

³Moglibyśmy wybrać dowolne inne ONB, ale znakomita większość rachunków jest przeprowadzana w bazach obliczeniowych (computational bases) – stąd ich nazwa.

⁴Jedna z amplitud jest ujemna, gdyż mechanika kwantowa dopuszcza dowolną zespoloną amplitudę, o ile stan układu jest poprawnie znormalizowany.

Przypominamy, że zapis $|ab\rangle\langle cd|$ jest skrótem od $|a\rangle\langle c| \otimes |b\rangle\langle d|$, co pozwala szybko wykonać częściowy ślad po każdym z podukładów. Na początek “śladujemy” pierwszy układ otrzymując zredukowaną macierz gęstości dla podukładu B , postaci

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB} = \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| \quad (31)$$

$$+ \frac{1}{4} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |0\rangle\langle 1| \quad (32)$$

$$+ \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| \quad (33)$$

$$+ \frac{1}{4} |1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1|. \quad (34)$$

Jak widać, zostały tylko te prawe strony czynników $|a\rangle\langle c| \otimes |b\rangle\langle d|$, których lewe człony miały zgodne indeksy (zgodnie z warunkami ONB). Wynik częściowego śladu jest w ogólności operatorem (macierzą) o odpowiednio pomniejszonym wymiarze:

$$\rho_B = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad (35)$$

co stanowi dobrze zdefiniowaną macierz gęstości wymiaru 2×2 .

Podobnie wykonujemy drugie śladowanie:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \frac{1}{4} |0\rangle\langle 0| - \frac{1}{4} |0\rangle\langle 2| + \frac{1}{4} |0\rangle\langle 1| \quad (36)$$

$$+ \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1| \quad (37)$$

$$- \frac{1}{4} |2\rangle\langle 0| + \frac{1}{4} |2\rangle\langle 2| - \frac{1}{4} |2\rangle\langle 1| \quad (38)$$

$$+ \frac{1}{4} |1\rangle\langle 0| - \frac{1}{4} |1\rangle\langle 2| + \frac{1}{4} |1\rangle\langle 1|. \quad (39)$$

Tym razem, w zapisie macierzowym, mamy

$$\rho_A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}. \quad (40)$$

Zauważmy, że $\rho_A \otimes \rho_B \neq \rho_B \otimes \rho_A \neq \rho_{AB}$.

1.4 częściowy ślad układu $2 \otimes 3$

Zmodyfikujmy nieznacznie poprzedni układ. Tym razem, przy tym samym wyborze baz dla obu podprzestrzeni zamieniamy kolejność⁵ podukładów: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$, oraz rozważamy znormalizowany stan czysty układu dwóch cząstek typu $2 \otimes 3$ w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |02\rangle + |12\rangle), \quad (41)$$

czyli, w postaci jawnej (z dołożonymi indeksami A oraz B), będzie on zapisywany jako wektor

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_A \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \quad (42)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{AB} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{AB} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{AB} \in \mathbb{C}^6. \quad (43)$$

Mamy więc macierz gęstości

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi| = \frac{1}{3}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{3}|00\rangle\langle 02| + \frac{1}{3}|00\rangle\langle 12| \quad (44)$$

$$+ \frac{1}{3}|02\rangle\langle 00| + \frac{1}{3}|02\rangle\langle 02| + \frac{1}{3}|02\rangle\langle 12| \quad (45)$$

$$+ \frac{1}{3}|12\rangle\langle 00| + \frac{1}{3}|12\rangle\langle 02| + \frac{1}{3}|12\rangle\langle 12|. \quad (46)$$

i liczymy częściowe ślady otrzymując

$$\rho_A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \rho_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Dla porządku podajemy inny sposób na liczenie częściowego śladu, wynikający niejako wprost z definicji tej operacji. Policzmy ślad drugiego podukładu (dla śladowania po przestrzeni \mathcal{H}_A rachunki będą analogiczne). Zatem⁶

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \sum_{j=0}^2 {}_B\langle j | \rho_{AB} | j \rangle_B = \dots \quad (48)$$

gdzie $\{|j\rangle_B\}_{j=0,1,2}$ jest bazą obliczeniową w podprzestrzeni $\mathcal{H}_B \cong \mathbb{C}^3$. Oznacza to, że drugi człon każdego czynnika w (44), (45) oraz (46) musimy objąć nawiasem $\langle j | \dots | j \rangle$ dla $j \in \{0, 1, 2\}$,

⁵Operatory/macierze w ogólności nie komutują. Podobnie iloczyn tensorowy, tj. $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \neq \mathbb{C}^{d_2} \otimes \mathbb{C}^{d_1}$.

⁶To jest ten moment, kiedy zapis pod sumą jest zupełnie niepoprawny i zwyczajnie błędny, gdyż nie zgadzają się wymiary wektora $|j\rangle$ oraz macierzy ρ_{AB} ! Poprawnie należałoby napisać $(\mathbb{I} \otimes {}_B\langle j |) \rho_{AB} (\mathbb{I} \otimes |j\rangle_B)$, ale nikt tego nie robi...

otrzymując dość długie wyrażenie (dla przejrzystości pomijamy skalar $1/3$)

$$\dots = |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|0\rangle\langle 2|0\rangle + |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 0|0\rangle\langle 2|0\rangle + \quad (49)$$

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|2\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|2\rangle\langle 2|0\rangle + |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 0|2\rangle\langle 2|0\rangle + \quad (50)$$

$$|1\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|2\rangle\langle 0|0\rangle + |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|2\rangle\langle 2|0\rangle + |1\rangle\langle 1| \otimes \langle 0|2\rangle\langle 2|0\rangle + \quad (51)$$

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|0\rangle\langle 0|1\rangle + |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|0\rangle\langle 2|1\rangle + |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 1|0\rangle\langle 2|1\rangle + \quad (52)$$

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|2\rangle\langle 0|1\rangle + |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|2\rangle\langle 2|1\rangle + |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 1|2\rangle\langle 2|1\rangle + \quad (53)$$

$$|1\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|2\rangle\langle 0|1\rangle + |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|2\rangle\langle 2|1\rangle + |1\rangle\langle 1| \otimes \langle 1|2\rangle\langle 2|1\rangle + \quad (54)$$

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|0\rangle\langle 0|2\rangle + |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|0\rangle\langle 2|2\rangle + |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 2|0\rangle\langle 2|2\rangle + \quad (55)$$

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|2\rangle\langle 0|2\rangle + |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|2\rangle\langle 2|2\rangle + |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 2|2\rangle\langle 2|2\rangle + \quad (56)$$

$$|1\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|2\rangle\langle 0|2\rangle + |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|2\rangle\langle 2|2\rangle + |1\rangle\langle 1| \otimes \langle 2|2\rangle\langle 2|2\rangle. \quad (57)$$

Teraz wystarczy spojrzeć na prawe strony iloczynów tensorowych, gdzie znajdują się podwójne iloczyny skalarne postaci $\langle \mathbf{j}|\cdot\rangle\langle \cdot|\mathbf{j}\rangle$ i z warunków ortogonalności, $\langle j|k\rangle = \delta_{j,k}$, natychmiast odczytać, które (zaznaczone na **zielono**) projektory po lewej stronie \otimes nie znikają⁷. Mianowicie

$$\rho_A = \frac{1}{3} \left(|2\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right). \quad (58)$$

W przypadku śladowania po pierwszym podukładzie, sumowalibyśmy od 0 do 1 i tym razem wyszukiwali, które projektory po prawej stronie każdego czynnika stanowią przyczynki do zredukowanej macierzy gęstości (47), zapisywanej też jako

$$\rho_B = \frac{1}{3} \left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2| \right). \quad (59)$$

Podsumujmy dwa powyższe przykłady następującą obserwacją. W pierwszym przypadku struktura macierzy gęstości odpowiadającej stanowi $|\psi\rangle_{AB}$ składa się z 9 bloków – każdy o wymiarze 2×2 . W drugim przypadku są to 4 bloki o wymiarze 3×3 . Obie macierze gęstości są wymiaru 6×6 . Napiszmy je w postaci jawnej z zaznaczeniem struktury wewnętrznej wynikającej z postaci produktu \otimes . Są to odpowiednio

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ dla } 3 \otimes 2 \quad (60)$$

oraz

$$\rho_{AB} = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ dla } 2 \otimes 3 \quad (61)$$

⁷Iloczyn tensorowy macierzy przez liczbę redukuje się do zwykłego mnożenia, tj. $M \otimes \alpha = \alpha M$.

Proszę się uważnie przyglądać tym macierzom i spróbować zrozumieć:

1. sposób adresacji^a tych macierzy za pomocą indeksów bazowych $\{0, 1\}_A$ oraz $\{0, 1, 2\}_B$ tak, by można je szybko napisać patrząc się na równania (27) – (30) oraz (44) – (46), a konkretnie na postać projektorów $|ab\rangle\langle cd| = |a\rangle\langle c| \otimes |b\rangle\langle d|$,
2. jaki jest jeszcze szybszy sposób na wyznaczenie z tych macierzy ich zredukowanych macierzy gęstości: (40), (40) oraz (47).

^aPodpowiedź: system dwójkowy, trójkowy, a może hybrydowy...

1.5 faktoryzacja stanu w układzie $2 \otimes 3$

Rozważamy te same, co powyżej bazy przestrzeni $\mathcal{H}_A \cong \mathbb{C}^2$ oraz $\mathcal{H}_B \cong \mathbb{C}^3$ oraz czysty stan dwucząstkowy postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |2\rangle_B \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} [0, 1, 1, 0, 0, 0]^T \in \mathbb{C}^6. \quad (62)$$

Macierz gęstości stanu $|\psi\rangle_{AB}$ to

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB} \langle \psi| = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (63)$$

Zredukowane macierze gęstości⁸ to

$$\rho_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \rho_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Tym razem $\rho_A \otimes \rho_B = \rho_{AB}$, a jednocześnie $\rho_B \otimes \rho_A \neq \rho_{AB}$, co jest prostą konsekwencją faktu, w jaki sposób zadana została struktura tensorowa na przestrzeni $2 \otimes 3 \neq 3 \otimes 2$. Ponadto, można zauważyć, że sam wyjściowy stan $|\psi\rangle_{AB}$ zapisuje się w postaci sfaktoryzowanej

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |2\rangle_B \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A \otimes \left(|1\rangle_B + |2\rangle_B \right) = \quad (65)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A \otimes \left(|1+2\rangle_B \right), \quad (66)$$

gdzie widzimy jeszcze jedną wygodę płynącą z użycia ketów, czyli zwarty zapis sumy dwóch wektorów

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_B + |2\rangle_B \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} |1+2\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B. \quad (67)$$

⁸RDM = reduced density matrix.

1.6 dekompozycja Schmidta $2 \otimes 2$

Przykład wyznaczenia rozkładu Schmidta dla dwucząstkowego (dwu-qubitowego) stanu czystego. Rozważamy stan

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - i|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2, \quad (68)$$

gdzie $\{|0\rangle = [1, 0]^T, |1\rangle = [0, 1]^T\}$ to baza obliczeniowa (kanoniczna) w \mathbb{C}^2 . Stan $|\psi\rangle_{AB}$ zapisany początkowo w postaci podwójnej sumy

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \alpha_{j,k} |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B, \quad (69)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (70)$$

zostanie przepisany w postaci pojedynczej sumy i specjalnej bazy produktowej, którą wyznaczymy z odpowiednich zredukowanych macierzy gęstości.

Odpowiadająca stanowi $|\psi\rangle_{AB} = [1, -1, 0, -i]^T / \sqrt{3}$ macierz gęstości to

$$\rho_{AB} = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & i \\ -1 & 1 & 0 & -i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (71)$$

a macierze zredukowane względem obu podukładów:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Po zdiagnozowaniu obu macierzy otrzymujemy wartości własne λ_j oraz odpowiadające im (jeszcze nieznormalizowane) wektory własne $|a_j\rangle$ oraz $|b_j\rangle$,

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{6} \quad \longleftrightarrow \quad |a_1\rangle = \left[\frac{i}{2} \left(-1 + \sqrt{5} \right), 1 \right]^T, \quad (73)$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \quad \longleftrightarrow \quad |a_2\rangle = \left[\frac{i}{2} \left(-1 - \sqrt{5} \right), 1 \right]^T, \quad (74)$$

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{6} \quad \longleftrightarrow \quad |b_1\rangle = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} \right), 1 \right]^T, \quad (75)$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \quad \longleftrightarrow \quad |b_2\rangle = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{5} \right), 1 \right]^T. \quad (76)$$

Wartości własne (kwadraty współczynników Schmidta) są w obu przypadkach identyczne. Po dokonaniu normalizacji wszystkich wektorów własnych, konstruujemy postać Schmidta stanu $|\psi\rangle_{AB}$ w formie pojedynczej sumy

$$|\psi\rangle_{AB} = \sqrt{\lambda_1} |a_1\rangle \otimes |b_1\rangle + \sqrt{\lambda_2} |a_2\rangle \otimes |b_2\rangle = \sum_{j=1}^2 \sqrt{\lambda_j} |a_j\rangle \otimes |b_j\rangle, \quad (77)$$

gdzie $\{|a_j\rangle \otimes |b_j\rangle\}_{j=1,2} \subset \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ jest wyliczoną bazą produktową.

1.7 dekompozycja Schmidta $2 \otimes 3$

Niech

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(i|00\rangle + |02\rangle - |10\rangle - |11\rangle - |12\rangle \right) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3, \quad (78)$$

gdzie odpowiednie ONB to $\{|j\rangle\}_{j=0}^1 \subset \mathbb{C}^2$ oraz $\{|k\rangle\}_{k=0}^2 \subset \mathbb{C}^3$. W ogólności stan $|\psi\rangle_{AB}$ można zapisać jako sumę

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^2 \alpha_{j,k} |j\rangle \otimes |k\rangle. \quad (79)$$

Współczynniki zespolone $\alpha_{j,k}$ możemy złożyć w macierz

$$\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Wiemy [z wykładu], że rozkład Schmidta odpowiada SVD macierzy $\alpha = [\alpha_{j,k}]_{j,k=0}^{1,2}$, czyli $\alpha = U\Sigma V^\dagger$, gdzie

$$U = \begin{bmatrix} -(i+1)/\sqrt{6} & (i+1)/\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (81)$$

oraz

$$V^\dagger = \begin{bmatrix} (i+3)/2/\sqrt{6} & -i/\sqrt{3} & i/2 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & -(i+1)/2 \\ -(i+3)/2/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Odtwarzamy postać Schmidta z odpowiednich kolumn macierzy U oraz wierszy V (uwaga na sprzężenie!)

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -(i+1)/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -(i+3)/2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ (i-3)/2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} (i+1)/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} [i, 0, 1, -1, -1, -1]^\top \quad (85)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(i|00\rangle + |02\rangle - |10\rangle - |11\rangle - |12\rangle \right). \quad (86)$$

Tym razem jeszcze lepiej widać korzyść z SD – w miejsce pięciu członów oryginalnej sumy, mamy jedynie dwa, w zamian za trochę bardziej skomplikowaną bazę.

1.8 puryfikacja stanu mieszanego

Niech $p \in [0, 1]$ oraz

$$\rho = \frac{1-p}{4}\mathbb{I} + p|\Phi_2^+\rangle\langle\Phi_2^+| \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_A. \quad (87)$$

Stan ρ jest poprawnie znormalizowany $\text{Tr}\rho = (1-p) + p = 1$, ale jego czystość zależy od p , tj.

$$\mathcal{P}(\rho) = \text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}\left\{\left(\frac{1-p}{4}\right)^2\mathbb{I} + \frac{2(1-p)p}{4}|\Phi_2^+\rangle\langle\Phi_2^+| + p^2|\Phi_2^+\rangle\langle\Phi_2^+|\right\} = \frac{1+3p^2}{4}. \quad (88)$$

Zapisany w postaci macierzowej

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+p & \cdot & \cdot & 2p \\ \cdot & 1-p & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1-p & \cdot \\ 2p & \cdot & \cdot & 1+p \end{bmatrix}, \quad (89)$$

a następnie zdiagonalizowany, przyjmuje postać

$$\rho = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cdot & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & \cdot & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}}_{=P} \frac{1}{4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1+3p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1-p & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1-p & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1-p \end{bmatrix}}_{\Delta} P^\dagger, \quad (90)$$

gdzie P jest macierzą przejścia do bazy w której ρ przyjmuje postać diagonalną Δ . Elementy tej bazy to wektory, które możemy nazwać w następujący sposób

$$|b_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |b_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |b_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (91)$$

czyli stan ρ można zapisać jako

$$\rho = \sum_j q_j |b_j\rangle\langle b_j| = \frac{1+3p}{4}|b_0\rangle\langle b_0| + \frac{1-p}{4}|b_1\rangle\langle b_1| + \frac{1-p}{4}|b_2\rangle\langle b_2| + \frac{1-p}{4}|b_3\rangle\langle b_3|, \quad (92)$$

ze współczynnikami q_j , które stanowią wartości własne ρ .

Purifikację stanu ρ najlepiej przeprowadzić z pomocą bazy kanonicznej przestrzeni \mathcal{H}_B , która jest kopią oryginalnej przestrzeni $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, tj. produktowej ONB $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Otrzymujemy zatem

$$|\psi\rangle \equiv \sqrt{q_0}|b_0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{q_1}|b_1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{q_2}|b_2\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle + \sqrt{q_3}|b_3\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle. \quad (93)$$

Można sprawdzić, że $\text{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi| = \rho$.

Reasumując, najbardziej wymagająca część puryfikacji, to diagonalizacja macierzy ρ . Zauważmy, że w powyższym przykładzie jedna z wartości własnych jest potrójnie zdegenerowana, co oznacza, że należy przez chwilę zastanowić się, w jaki sposób określić trzy liniowo niezależne (znormalizowane!) wektory $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ oraz $|b_3\rangle$, które będą jej odpowiadać.

1.9 macierze Pauliego X, Y, Z

Macierz

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

jest z konstrukcji podana w postaci diagonalnej, zatem można od razu napisać jej rozkład spektralny $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$. Innymi słowy

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= +|0\rangle, \\ Z|1\rangle &= -|1\rangle, \end{aligned}$$

tj. wektory bazy obliczeniowej z \mathbb{C}^2 są wektorami własnymi operatora Z.

\implies Pomiar kwantowy jest najczęściej wykonywany w bazie Z.

Antydiagonalna postać macierzy

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

wymaga prostych obliczeń w celu wyznaczenia rozkładu spektralnego. Policzmy to przy użyciu dwóch notacji.

Z równania własnego zapisanego w sposób algebraiczny wyznaczamy wartości

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda = \mp 1$$

oraz (znormalizowane) wektory własne

$$\begin{aligned} \lambda = +1 &\implies \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \lambda = -1 &\implies \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle. \end{aligned}$$

Kwantowy sposób zapisu.

Założmy, że poszukiwany wektor własny jest ogólnej postaci $|w\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, gdzie $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, czyli $X|w\rangle = w|w\rangle$. Napiszmy zatem

$$(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = w\alpha|0\rangle + w\beta|1\rangle,$$

co, po wymnożeniu i skróceniu, prowadzi do wyrażenia $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = w\alpha|0\rangle + w\beta|1\rangle$, skąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \alpha &= w\beta \\ \beta &= w\alpha \end{cases} \implies \alpha = w^2\alpha \implies w = \mp 1.$$

Niech $w = -1$. Wtedy $\beta = -\alpha$ oraz, z warunku normalizacji, $|\alpha|^2 + |-\alpha|^2 = 2|\alpha|^2 = 1$, czyli $|\alpha| = \mp 1/\sqrt{2}$. Ale $\alpha \in \mathbb{C}$, więc $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ dla pewnej fazy $\varphi \in [0, 2\pi[$. Zatem

$$\alpha = \mp e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \beta = \pm e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Postać wektora własnego

$$|w\rangle = \mp e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \mp |1\rangle) = -e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle,$$

ponieważ ignorujemy fazę globalną $-e^{i\varphi}$. Analogicznie, dla $w = +1$, otrzymujemy $|w\rangle = |+\rangle$.

Macierz \mathbf{X} przyjmuje zatem postać diagonalną w bazie własnej: $\mathbf{X} = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$.

Zauważmy ponadto, że

$$\begin{aligned} |+\rangle\langle+| &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{X}), \\ |-\rangle\langle-| &= \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Uwaga na pułapki! Jeszcze inny, bardzo zły, sposób na rozwiązanie równania własnego dla macierzy \mathbf{X} . Równanie własne

$$(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)|w\rangle = w|w\rangle$$

mnożymy obustronnie przez $\langle 0| \cdot \dots$ oraz $\langle 1| \cdot \dots$ otrzymując układ równań

$$\begin{cases} \langle 1|w\rangle = w\langle 0|w\rangle \\ \langle 0|w\rangle = w\langle 1|w\rangle \end{cases} \implies \langle 1|w\rangle = w^2\langle 1|w\rangle \implies w = \mp 1 \implies |w\rangle = |\mp\rangle.$$

Jeżeli ktoś tak policzy, spotka go kara i cierpienie.

1.10 entropia von Neumanna – przypadek quditowy

Dwucząstkowy stan $|\psi\rangle_{AB} \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ dla $d \geq 2$ jest maksymalnie splątany, gdy odpowiadająca mu zredukowana macierz gęstości (RDM) jest stanem maksymalnie zmieszonym, tj.

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB} = \rho_*, \quad \text{lub} \quad \rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \rho_*, \quad (94)$$

gdzie $\rho_{AB} = |\psi\rangle_{AB}\langle\psi|$ oraz $\rho_* = \mathbb{I}_d/d$. Na przykład,

$$|\psi\rangle_{AB} = |\Phi_d^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle_A \otimes |j\rangle_B \implies \rho_{AB} = \frac{1}{d} \left(\sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle_A \otimes |j\rangle_B \right) \left(\sum_{k=0}^{d-1} \langle k|_A \otimes \langle k|_B \right) \quad (95)$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{j,k=0}^{d-1} |j\rangle_A \langle k| \otimes |j\rangle_B \langle k|, \quad (96)$$

wtedy, częściowy ślad po dowolnym z dwóch podukładów wynosi

$$\text{Tr}_A \rho_{AB} = \frac{1}{d} \sum_{j,k=0}^{d-1} \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{d-1} \langle l|_j \rangle_A \langle k|_l \rangle \right)}_{=\delta_{i,j}\delta_{k,l}} \otimes |j\rangle_B \langle k| = \frac{1}{d} \sum_{l=0}^{d-1} |l\rangle_B \langle l| = \frac{1}{d} \mathbb{I}_d = \rho_* \quad (97)$$

$$= \dots = \text{Tr}_B \rho_{AB}. \quad (98)$$

Czyli stan maksymalnie splątany to taki, którego entropia zredukowanej macierzy gęstości jest maksymalna, tj.

$$S(\rho_X) = - \sum_1^d \frac{1}{d} \log \frac{1}{d} = - \log \frac{1}{d} = \log d. \quad (99)$$

W przypadku przestrzeni dwucząstkowej z różnymi wymiarami lokalnymi, $d_A \neq d_B$, przyjmujemy $d = \min\{d_A, d_B\}$.

1.11 pomiar kwantowy rzutowy – przykład

Probabilistyczny charakter mechaniki kwantowej pozwala jedynie określić z jakim prawdopodobieństwem możemy otrzymać dany wynik pomiaru, tj. $p_j = \|M_j|\psi\rangle\|^2$ jest miarą częstości otrzymania wyniku pomiaru (rzutowego) numer j . W wyniku pomiaru stan układu fizycznego przechodzi w jeden ze stanów (wektorów) własnych mierzonej obserwacji odpowiadający otrzymanej wartości własnej. Zwykle wektor otrzymany w wyniku tej operacji nie musi być znormalizowany, gdyż rzut nie musi zachowywać normy. Jako, że wektory nieznormalizowane nie posiadają dobrze określonej interpretacji fizycznej, każdorazowo taki wektor należy unormować przy pomocy otrzymanego prawdopodobieństwa, czyli

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{M_j|\psi\rangle}{\|M_j|\psi\rangle\|} = \frac{M_j|\psi\rangle}{\sqrt{p_j}}. \quad (100)$$

Wykonując pomiar rzutowy kilkakrotnie, otrzymamy wynik, który pojawił się jako pierwszy w sekwencji operacji. Zakładając idealne warunki pomiarowe (niemożliwe do otrzymania w laboratorium) rozpoczynamy od

$$|\psi\rangle \xrightarrow{M_j} \frac{M_j|\psi\rangle}{\|M_j|\psi\rangle\|}. \quad (101)$$

Jeżeli teraz wykonamy pomiar z operatorem $M_{k \neq j}$, to

$$\frac{M_j|\psi\rangle}{\|M_j|\psi\rangle\|} \xrightarrow{M_k} \frac{M_k M_j|\psi\rangle}{\|M_k M_j|\psi\rangle\|} = \frac{0|\psi\rangle}{\|0|\psi\rangle\|} = 0, \quad (102)$$

czyli prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $k \neq j$ jest zerowe, gdyż norma wektora zerowego to też zero. Z drugiej strony, gdy $k = j$, to dostajemy (tym razem) poprawnie unormowany (jednostkowy) wektor,

$$\frac{M_j|\psi\rangle}{\|M_j|\psi\rangle\|} \xrightarrow{M_j} \frac{M_j M_j|\psi\rangle}{\|M_j M_j|\psi\rangle\|} = \frac{M_j|\psi\rangle}{\|M_j|\psi\rangle\|}, \quad (103)$$

czyli zdarzenie polegające na otrzymaniu tego samego wyniku jest pewne.

Przykład. Niech dany będzie pomiar qubitowy

$$\mathcal{M} = \left\{ M_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (104)$$

oraz qubit w stanie $|\psi\rangle = \sqrt{2/5}|0\rangle + i\sqrt{3/5}|1\rangle \in \mathbb{C}^2$. Pomiar \mathcal{M} daje następujące rezultaty:

$$M_0|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2/5} \\ i\sqrt{3/5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/5} \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{5}}|0\rangle, \quad (105)$$

$$M_1|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2/5} \\ i\sqrt{3/5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i\sqrt{3/5} \end{bmatrix} = i\sqrt{\frac{3}{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i\sqrt{\frac{3}{5}}|1\rangle. \quad (106)$$

Zatem, po znormalizowaniu i usunięciu fazy globalnej, otrzymujemy stany:

$$M_0|\psi\rangle \mapsto |0\rangle, \quad (107)$$

$$M_1|\psi\rangle \mapsto i|1\rangle = e^{i\pi/2}|1\rangle \sim |1\rangle, \quad (108)$$

ponieważ odpowiednie prawdopodobieństwa otrzymania wyników 0 oraz 1 wynoszą $p_0 = 2/5$ oraz $p_1 = 3/5$.

Wynik ten zgadza się ze standardową interpretacją mechaniki kwantowej, według której kwadrat modułu amplitudy jest prawdopodobieństwem znalezienia stanu $|\psi\rangle$ w jednym ze stanów bazowych (stanów własnych pewnej obserwacji) – tu: $|0\rangle$ lub $|1\rangle$.

1.12 bramki kwantowe wieloqubitowe

Definiujemy bramkę kontrolowanej negacji $CX_{c;t}$, gdzie pierwszy indeks oznacza qubit kontrolny (**control**), a drugi – qubit docelowy (**target**), tj. $CX_{1;2} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$. Rozważmy dowolny stan $|ab\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ i działanie bramki $CX_{1;2}$ na ten stan:

$$CX_{1;2}|ab\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)|a\rangle \otimes |b\rangle = |0\rangle\langle 0|a\rangle \otimes I|b\rangle + |1\rangle\langle 1|a\rangle \otimes X|b\rangle \quad (109)$$

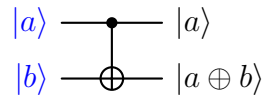
$$= \begin{cases} |0\rangle \otimes |b\rangle & : a = 0, \forall b \in \{0,1\} \\ |1\rangle \otimes X|b\rangle & : a = 1 \end{cases} \quad (110)$$

Ze wzoru (110) natychmiast widać, że gdy pierwszy qubit jest w stanie $|0\rangle$, qubit drugi pozostaje niezmienny, niezależnie od tego jaka jest wartość $b \in \{0,1\}$. Natomiast, gdy pierwszy qubit jest w stanie $|1\rangle$ drugi qubit ulega negacji zadanej przez bramkę bit-flip X .

Widać stąd też dlaczego bramkę $CX \equiv CNOT$ oznacza się za pomocą znaku \oplus . Mianowicie, wzór (110) można zapisać w zwarty sposób jako

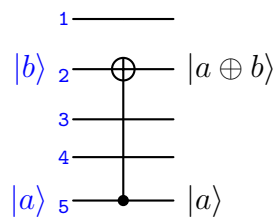
$$CX_{1;2}|ab\rangle = |a\rangle \otimes |a \oplus b\rangle = |a, a \oplus b\rangle, \quad (111)$$

gdzie \oplus oznacza dodawanie modulo 2. Poniżej znajduje się diagramatyczny zapis bramki kontrolowanej negacji:



Analogicznie dla bramki $CX_{2;1}$.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z wieloma podukładami (qubitowymi), sytuacja nieznacznie się komplikuje, gdyż musimy uwzględnić wszystkie możliwe konfiguracje qubitów w podukładach, które nie biorą udziału w kontrolowanej negacji. Rozważmy na przykład układ 5-qubitowy i bramkę $CX_{5;2}$



Zatem dla linii 1, 3 oraz 4, których nie obejmuje działanie bramki $CX_{5;2}$, piszemy wszystkie możliwe kombinacje qubitów $|0\rangle$ oraz $|1\rangle$, których jest $2^3 = 8$, tj.

$$|0\rangle\langle 0|_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes |0\rangle\langle 0|_4 \otimes \dots + \quad (112)$$

$$|0\rangle\langle 0|_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes |1\rangle\langle 1|_4 \otimes \dots + \quad (113)$$

$$|0\rangle\langle 0|_1 \otimes \dots \otimes |1\rangle\langle 1|_3 \otimes |0\rangle\langle 0|_4 \otimes \dots + \quad (114)$$

$$|0\rangle\langle 0|_1 \otimes \dots \otimes |1\rangle\langle 1|_3 \otimes |1\rangle\langle 1|_4 \otimes \dots + \quad (115)$$

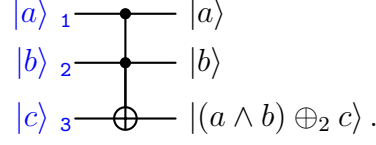
$$|1\rangle\langle 1|_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes |0\rangle\langle 0|_4 \otimes \dots + \quad (116)$$

$$|1\rangle\langle 1|_1 \otimes \dots \otimes |0\rangle\langle 0|_3 \otimes |1\rangle\langle 1|_4 \otimes \dots + \quad (117)$$

$$|1\rangle\langle 1|_1 \otimes \dots \otimes |1\rangle\langle 1|_3 \otimes |0\rangle\langle 0|_4 \otimes \dots + \quad (118)$$

$$|1\rangle\langle 1|_1 \otimes \dots \otimes |1\rangle\langle 1|_3 \otimes |1\rangle\langle 1|_4 \otimes \dots \equiv CX_{5;2}, \quad (119)$$

Naturalnym uogólnieniem bramki $\text{CU}_{c;t}$ jest bramka, która posiada wiele qubitów kontrolnych $\text{U}_{c_1,\dots,c_k;t}$. Przykładem jest bramka Toffoliego $\text{CX}_{1,2;3}$ przedstawiona poniżej, gdzie trzeci qubit ulega negacji wtedy i tylko wtedy, gdy dwa pierwsze są równe $|1\rangle$,



Ogólna definicja bramki $\text{CX}_{c_1,c_2;t}$ dla układu trzech qubitów:

$$\text{CX}_{1,2;3} \equiv (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \Pi_1 \otimes \Pi_2) \otimes \mathbb{I} + \Pi_1 \otimes \Pi_2 \otimes \mathbf{X} \quad (141)$$

$$= \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \Pi_1 \otimes \Pi_2 \otimes \mathbb{I} + \Pi_1 \otimes \Pi_2 \otimes \mathbf{X} \quad (142)$$

$$= \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \Pi_1 \otimes \Pi_2 \otimes (\mathbf{X} - \mathbb{I}), \quad (143)$$

gdzie $\Pi_j = |1\rangle\langle 1|$ oznacza projektor na stan $|1\rangle$ działający na qubit numer j , natomiast $\mathbb{I} = \mathbb{I}$, ale symbole te celowo zostały graficznie rozdzielone, aby wzmocnić czytelność. Wzór (141) jest bezpośrednim uogólnieniem definicji standardowej bramki $\text{CX}_{1;2}$, natomiast jego przekształcenie (143) podpowiada jak zdefiniować pozostałe trzy bramki:

$$\text{CX}_{1,3;2} \equiv \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \Pi_1 \otimes (\mathbf{X} - \mathbb{I}) \otimes \Pi_3, \quad (144)$$

$$\text{CX}_{2,3;1} \equiv \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + (\mathbf{X} - \mathbb{I}) \otimes \Pi_2 \otimes \Pi_3. \quad (145)$$

Analogicznie tworzymy bramkę $\text{CU}_{c_1,\dots,c_k;t}$ dla dowolnej ilości qubitów kontrolnych.

1.13 protokół kwantowej teleportacji qubitów (dygresja fizyczna)

Będziemy transportować informację w postaci stanu qubitowego $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ pomiędzy dwoma laboratoriami. Na początek przygotowujemy stan $|\psi\rangle$ w pierwszym laboratorium.

Dowolny qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ musi być poprawnie znormalizowanym stanem kwantowym, tj. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, przy czym amplitudy stanu mogą być zespolone, więc $\alpha = |\alpha|e^{i\arg(\alpha)}$ oraz $\beta = |\beta|e^{i\arg(\beta)}$. Wykorzystując jedność trygonometryczną możemy zamienić zmienne i napisać, że $|\alpha| = \cos \frac{\theta}{2}$ oraz $|\beta| = \sin \frac{\theta}{2}$ dla pewnego kąta θ . Wtedy stan przyjmuje postać

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} e^{i\arg(\alpha)} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\arg(\beta)} |1\rangle \\ &= e^{i\arg(\alpha)} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\arg(\beta) - \arg(\alpha))} |1\rangle \right) \\ &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\arg(\beta) - \arg(\alpha))} |1\rangle, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości pomijamy fazę globalną. Przyjmując $\varphi = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$ otrzymujemy ogólną postać stanu qubitowego zapisanego w postaci wektora Blocha

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle. \quad (146)$$

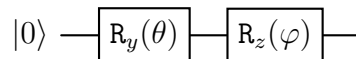
Oczywiście $\theta = 2 \arccos |\alpha|$.

Aby przygotować taki stan w pierwszym laboratorium korzystamy z [bramek rotacji na sferze Blocha](#) o kąt γ , odpowiednio wokół osi y oraz z :

$$\begin{aligned} R_y(\gamma) &= \exp \left\{ -\frac{i\gamma}{2} Y \right\} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}, \\ R_z(\gamma) &= \exp \left\{ -\frac{i\gamma}{2} Z \right\} = \begin{bmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uwaga, powyżej są eksponenty macierzowe (a nie liczbowe!), które działają na macierze Pauliego.

Obwód kwantowy realizujący stan $|\psi\rangle$ przyjmuje prostą postać:

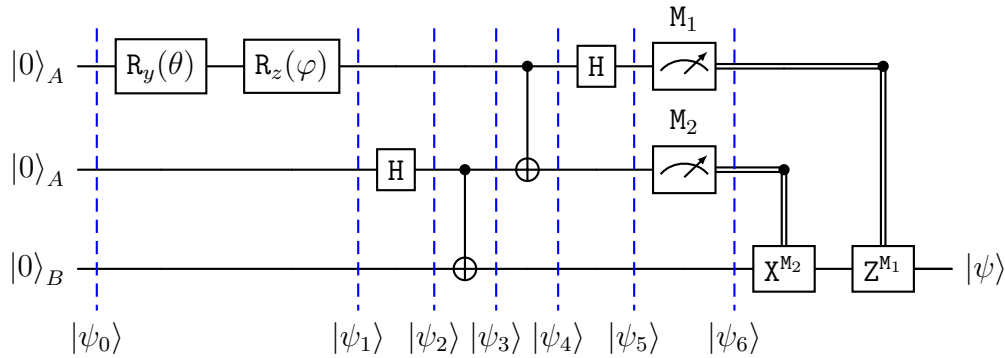


Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{bmatrix}}_{R_z(\varphi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{bmatrix}}_{R_y(\theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=|0\rangle} &= \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{bmatrix} \\ &= e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\ &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\ &= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Macierz unitarna $U = R_z(\varphi)R_y(\theta)$ stanowi przepis, który może być użyty przez pierwsze laboratorium w celu utworzenia wielu kopii stanu $|\psi\rangle$, działając na umowny stan początkowy $|0\rangle$.

Przypominamy z wykładu obwód kwantowy realizujący protokół kwantowej teleportacji, który tu zostaje wzbogacony o wszystkie początkowe operacje, tj. tworzenie stanu $|\psi\rangle$ po stronie pierwszego laboratorium oraz tworzenie splątania w postaci stanu $|\Phi_2^+\rangle$ dzielonego przez dwa laboratoria⁹:



Zatem pierwszy pośredni stan przyjmuje postać $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle \otimes |00\rangle$ i jego część, która jest w tym momencie po stronie pierwszego laboratorium zostanie przetransportowana do drugiego laboratorium: $|000\rangle \rightarrow |\psi\rangle \otimes |00\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |**\rangle \otimes |\psi\rangle$, gdzie * oznaczają nieistotne stany pozostałe po pomiarach wykonanych w pierwszym laboratorium – patrz niżej.

Prześledźmy w szczególności moment pomiaru i to, co następuje po nim. Mamy więc kolejny stan pośredni w postaci superpozycji

$$\begin{aligned}
 |\psi_5\rangle &= \frac{1}{2} \left(\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle \right) \\
 &= |00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)/2 + \\
 &\quad |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)/2 + \\
 &\quad |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)/2 + \\
 &\quad |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)/2.
 \end{aligned}$$

Laboratorium A wykonuje pomiar w bazie $Z \otimes Z$ – faktycznie jest to pomiar w bazie Bella, ale dzięki operacjom $CX_{1,2}H_1$ przechodzimy do bazy (kanonicznej) obliczeniowej. Jest to pomiar rzutowy opisywany operatorami pomiaru

$$\mathcal{M} = \left\{ \underbrace{|00\rangle\langle 00| \otimes \mathbb{I}}_{=M_{00}}, \underbrace{|01\rangle\langle 01| \otimes \mathbb{I}}_{=M_{01}}, \underbrace{|10\rangle\langle 10| \otimes \mathbb{I}}_{=M_{10}}, \underbrace{|11\rangle\langle 11| \otimes \mathbb{I}}_{=M_{11}} \right\}. \quad (147)$$

Na obwodzie pomiar jest schematycznie oznaczony przez M_1 oraz M_2 , co oznacza, że $M_{jk} = M_1 \otimes M_2 \otimes \mathbb{I}$ i za M_1 oraz M_2 podstawiamy jeden z projektorów: $|0\rangle\langle 0|$ lub $|1\rangle\langle 1|$. Zatem A wykonując pomiar na każdym z dwóch qubitów może otrzymać cztery pary wyników: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ oraz $(1, 1)$ – są to oczywiście przemapowane pary wartości własnych (∓ 1) obserwacji Z, którą mierzymy. Poniżej wyjątkowo nie dbamy o normalizację, którą można łatwo wyliczyć.

⁹Proszę zwrócić uwagę, że bramki rotacji są funkcją kątów θ oraz φ , jednakże trzymamy się pierwotnej notacji i stan qubitowy zależy od α oraz β .

1. A otrzymuje wynik $(0, 0)$ z prawdopodobieństwem $1/4$, a stan kolapsuje do postaci

$$\begin{aligned}
|\psi_5\rangle &\mapsto \frac{M_{00}|\psi_5\rangle}{\sqrt{p_{00}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{00}}} \left(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} \right) \left(|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{00}}} \left(\underbrace{|0\rangle\langle 0|}_{=1} \otimes \underbrace{|0\rangle\langle 0|}_{=1} \otimes \mathbb{I} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \underbrace{|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1|}_{=1} \otimes \underbrace{\mathbb{I}}_{=0} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \underbrace{\dots}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{00}}} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle).
\end{aligned}$$

Zatem B nie wykonuje żadnej operacji po swojej stronie, gdyż posiada już stan $|\psi\rangle$ w odpowiedniej postaci, o czym zostaje poinformowany przez A dwoma bitami kodującymi wyniki pomiaru: $M_1 = M_2 = 0$.

2. A otrzymuje wynik $(0, 1)$ z prawdopodobieństwem $1/4$, a stan kolapsuje do postaci

$$\begin{aligned}
|\psi_5\rangle &\mapsto \frac{M_{01}|\psi_5\rangle}{\sqrt{p_{01}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{01}}} \left(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbb{I} \right) \left(|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{01}}} \left(\underbrace{|0\rangle\langle 0|}_{=1} \otimes \underbrace{|1\rangle\langle 0|}_{=0} \otimes \mathbb{I} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + \underbrace{|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|}_{=1} \otimes \underbrace{\mathbb{I}}_{=1} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \underbrace{\dots}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{01}}} |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle).
\end{aligned}$$

Tym razem B musi wykonać na trzecim qubicie operację $Z^{M_1} X^{M_2} = Z^0 X^1 = X$ w celu korekty otrzymanego stanu:

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \xrightarrow{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes X} |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (148)$$

3. A otrzymuje wynik $(1, 0)$ z prawdopodobieństwem $1/4$, a stan kolapsuje do postaci

$$\begin{aligned}
|\psi_5\rangle &\mapsto \frac{M_{10}|\psi_5\rangle}{\sqrt{p_{10}}} = \dots \quad \text{pomijamy już obliczenia...} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{p_{10}}} |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle).
\end{aligned}$$

Tym razem B musi wykonać na trzecim qubicie operację $Z^{M_1} X^{M_2} = Z^1 X^0 = Z$ w celu korekty otrzymanego stanu:

$$|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \xrightarrow{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes Z} |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (149)$$

4. W ostatnim przypadku A otrzymuje wynik $(1, 1)$, stan po stronie A kolapsuje do $|1\rangle \otimes |1\rangle$, a B wykonuje korektę za pomocą operacji $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes ZX$.

Reasumując; za każdym razem obserwujemy, że stan po stronie A kolapsuje zgodnie z pomiarem do jednego z wektorów: $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ lub $|11\rangle$ – dokładnie tak, jak miało to miejsce [na wykładzie] w przypadku pomiaru stanu $|\Phi_2^+\rangle$ w bazie Z . Przed pomiarem A laboratorium B nie posiada konkretnej instancji stanu $|\psi\rangle$ ale superpozycję czterech możliwości. Pomiar kwantowy niszczy tę superpozycję oraz stan $|\psi\rangle$ po stronie A , ale z uwagi na korelacje wprowadzone przez współdzielenie stanu maksymalnie splątanego, pomiar w pierwszym z podukładów wpływa na postać stanu w drugim podukładzie, który wymaga jedynie korekty przekazanej kanałem klasycznym w schemacie LOCC.

Jeszcze kilka słów na temat fizycznej realizacji.

Dotychczasowy opis stanowi abstrakcyjny model matematyczny, odpowiadający rzeczywistym zjawiskom obserwowanym w eksperymentach laboratoryjnych, gdzie mogą zachodzić następujące procesy:

1. Wiązka lasera przepuszczona przez nieliniowy, dwójłomny kryształ generuje pary fotonów o splątanej polaryzacji w procesie SPDC. Fotonowe pary są następnie przesyłane do dwóch laboratoriów, gdzie ich stany kwantowe zostają zakodowane w tzw. pamięci kwantowej. Medium przechowujące informację o fotonach może stanowić chmura atomów, pułapka jonowa lub ośrodek ciała stałego (np. centrum NV w diamencie). W takim przypadku polaryzacja zaabsorbowanego fotonu zostaje odwzorowana na konfigurację spinową elektronów lub jąder atomowych. Z uwagi na zjawisko dekoherencji, stan kwantowy (qubit) w takim układzie może być utrzymywany w stabilnej formie przez czas rzędu mikrosekund lub milisekund (w zależności od medium). Uzyskane w ten sposób splątanie stanowi zasób kwantowy, który może być dalej wykorzystywany w schematach z klasyczną komunikacją (LOCC), przy czym LOCC nie jest w stanie wytworzyć splątania „z niczego”, a jedynie przetwarzać już istniejące zasoby.
2. Lokalne unitarne bramki kwantowe odpowiadają ewolucji stanu układu zgodnie z jego Hamiltonianem, kontrolowanej przez zewnętrzne pola. Najczęściej są to impulsy laserowe lub mikrofalowe o precyzyjnie dostrojonej częstotliwości, fazie i czasie trwania. Takie pola powodują przejścia między poziomami energetycznymi układu, wśród których stan podstawowy $|g\rangle = |0\rangle$ oraz wybrane stany wzbudzone $|e\rangle = |j \neq 0\rangle$ są sprzęgane w sposób kontrolowany, prowadząc do powstania końcowego stanu $|\psi\rangle = \sum_j \tau_j |j\rangle$. Bramki nielokalne (np. CX_{c;t}) wymagają współdzielenia splątania między laboratoriami oraz klasycznej komunikacji (np. protokół kwantowej teleportacji), ponieważ bezpośrednie oddziaływanie fizyczne między odległymi qubitami nie jest możliwe.
3. Pomiar stanu układu zależy od rodzaju zastosowanego medium fizycznego. W układach fonicznych pomiar realizowany jest za pomocą detektorów (np. zespoły fotodiod lawinowych), które rejestrują fotony przechodzące przez polaryzatory. W systemach ciał stałych lub jonowych wykorzystuje się pomiar fluorescencji powstałej w procesie deekscytacji poziomów wzbudzonych, gdzie rejestrowane są wymitowane fotony. Otrzymany wynik pomiaru ma charakter klasyczny i może być przesyłany między laboratoriami zwykłymi kanałami komunikacyjnymi (CC), stanowiąc dane wejściowe do dalszego przetwarzania (postprocessing).

1.14 reprezentacja środowiskowa mapy kwantowej

Pokażemy¹⁰ jak reprezentacja środowiskowa wiąże się z operatorami Krausa. W tym celu założymy dla uproszczenia, że środowisko zostało zainicjalizowane w stanie czystym $|0\rangle_E$. Mamy zatem

$$\mathrm{Tr}_E \left\{ U_{SE} \left(\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0| \right) U_{SE}^\dagger \right\} = (\mathbb{I}_S \otimes \mathrm{Tr}) \left\{ U_{SE} \left(\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0| \right) U_{SE}^\dagger \right\} \quad (150)$$

$$= \sum_e (\mathbb{I}_S \otimes \langle e|) U_{SE} \left(\rho_S \otimes |0\rangle_E \langle 0| \right) U_{SE}^\dagger (\mathbb{I} \otimes |e\rangle) \quad (151)$$

$$= \sum_e (\mathbb{I}_S \otimes \langle e|) U_{SE} (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E) \rho_S (\mathbb{I}_S \otimes \langle 0|) U_{SE}^\dagger (\mathbb{I}_S \otimes |e\rangle) \quad (152)$$

$$= \sum_e K_e \rho_S K_e^\dagger, \quad (153)$$

gdzie $K_e \equiv (\mathbb{I}_S \otimes \langle e|) U_{SE} (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E)$. Możemy łatwo potwierdzić warunek TP dla tak zdefiniowanych operatorów Krausa

$$\sum_e K_e^\dagger K_e = \sum_e (\mathbb{I}_S \otimes \langle 0|) U_{SE}^\dagger (\mathbb{I}_S \otimes |e\rangle) (\mathbb{I}_S \otimes \langle e|) U_{SE} (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E) \quad (154)$$

$$= \sum_e (\mathbb{I}_S \otimes \langle 0|) U_{SE}^\dagger (\mathbb{I}_S \otimes |e\rangle \langle e|) U_{SE} (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E) \quad (155)$$

$$= (\mathbb{I}_S \otimes \langle 0|) U_{SE}^\dagger \underbrace{(\mathbb{I}_S \otimes \sum_e |e\rangle \langle e|)}_{=\mathbb{I}_{SE}} U_{SE} (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E) \quad (156)$$

$$= (\mathbb{I}_S \otimes \langle 0|) U_{SE}^\dagger U_{SE} (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E) \quad (157)$$

$$= (\mathbb{I}_S \otimes \langle 0|) (\mathbb{I}_S \otimes |0\rangle_E) = \mathbb{I}_S \otimes \langle 0|0\rangle_E = \mathbb{I}_S. \quad (158)$$

Wszystko się zgadza, gdyż operatory K_e wysumowały się do jedności o wymiarze oryginalnego układu kwantowego.

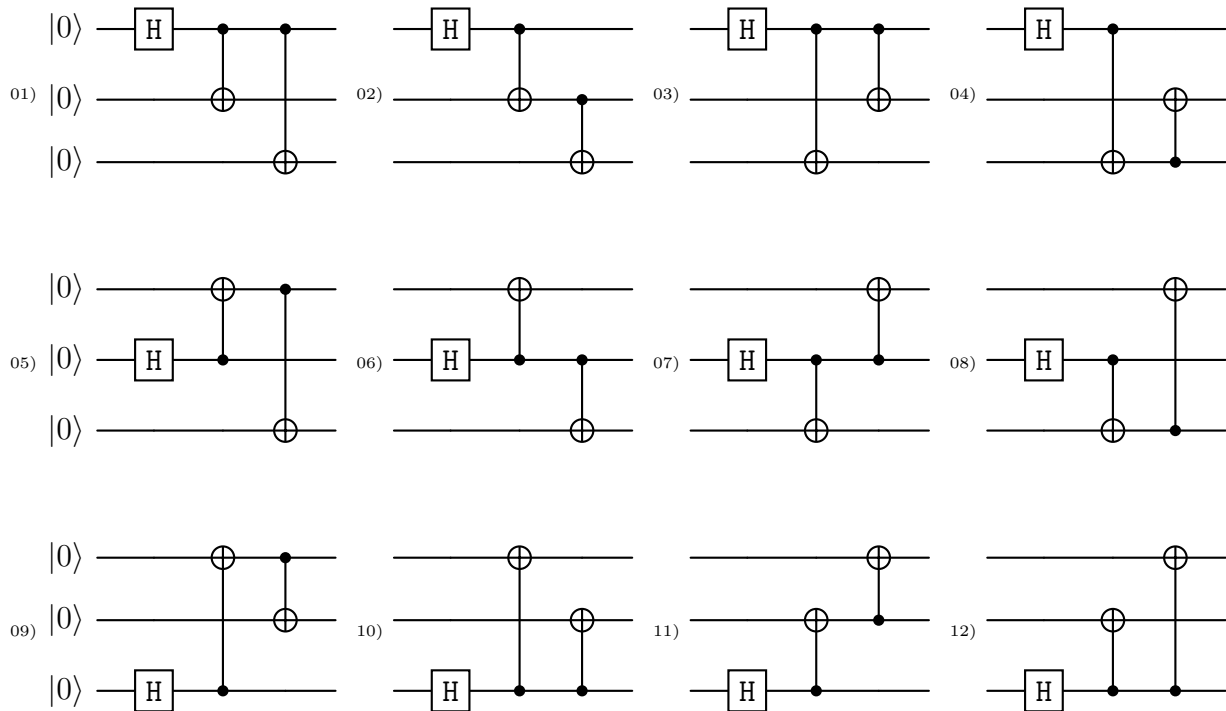
¹⁰ Materiał nadobowiązkowy...

1.15 stan $|\text{GHZ}\rangle \in 2 \otimes 2 \otimes 2$

Można łatwo pokazać, że stan

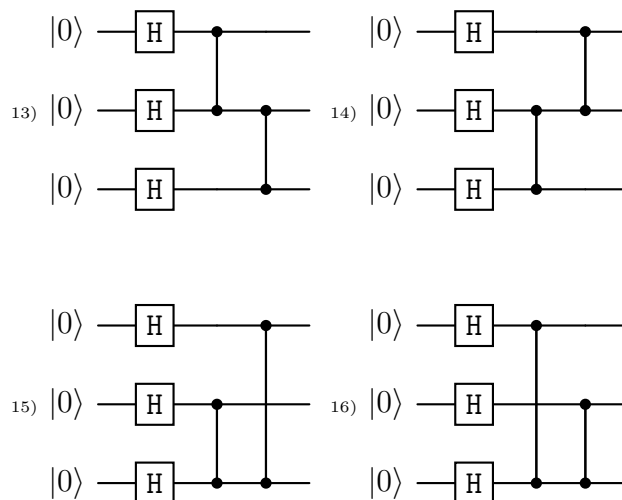
$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad (159)$$

jest generowany przez każdy z dwunastu przedstawionych obwodów:

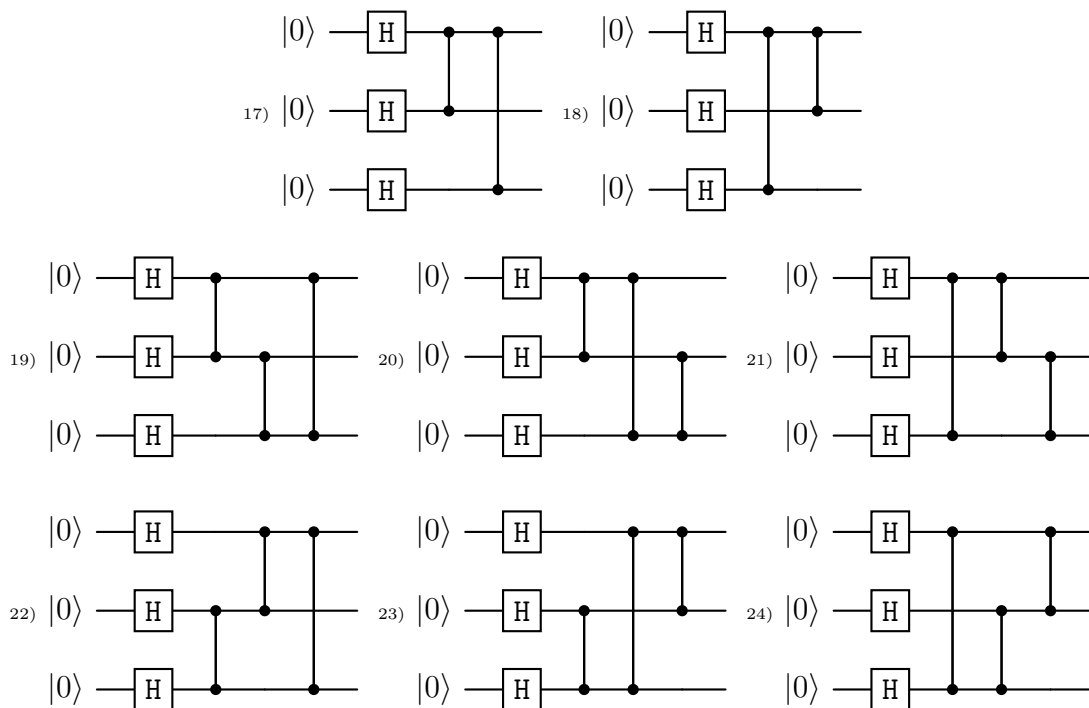


gdzie, krótko mówiąc, rozmieszczenie bramek $\text{CX}_{c;t}$ pokazuje jak kety $|1\rangle$ powstałe z superpozycji wygenerowanej przez bramkę H “propagują” się w drugim członie stanu.

Podobnie, każdy z dwunastu innych obwodów przedstawionych poniżej, również generuje stan $|\text{GHZ}\rangle$, jednakże w innej niż kanoniczna (obliczeniowa) bazie. Podzielimy je na cztery klasy – trzy zawierające po dwa obwody i czwartą – zawierającą sześć obwodów¹¹:



¹¹Ten szczególny podział jest wyjaśniony na wykładzie i wynika z klasyfikacji stanów grafowych.



Wszystkie wygenerowane w ten sposób stany $|\text{GHZ}\rangle$ są lokalnie unitarnie równoważne, tzn. istnieją takie macierze unitarne U_1 , U_2 oraz $U_3 \in \mathbb{U}(2)$, że $|\text{GHZ}_j\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes U_3 |\text{GHZ}_k\rangle$ dla $j \neq k$. Na przykład $|\text{GHZ}_{17}\rangle = \text{H} \otimes \text{I} \otimes \text{H} |\text{GHZ}_{16}\rangle$ lub $|\text{GHZ}_1\rangle = \text{XHX} \otimes \text{XHX} \otimes \text{X} |\text{GHZ}_{16}\rangle$, itp. Aby to wykazać należy skorzystać z faktu komutacji odpowiednich bramek oraz przydatnej tożsamości:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} |a\rangle \\ |b\rangle \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = (\text{I} \otimes \text{H}) \text{CZ}_{1;2} (\text{I} \otimes \text{H}) |ab\rangle \\
 & = (\text{I} \otimes \text{H}) \text{CZ}_{1;2} |a\rangle \otimes \text{H}|b\rangle \tag{160}
 \end{aligned}$$

$$= (\text{I} \otimes \text{H}) (|0\rangle\langle 0| \otimes \text{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \text{Z}) |a\rangle \otimes \text{H}|b\rangle \tag{161}$$

$$= (\text{I} \otimes \text{H}) (|0\rangle\langle 0| \otimes \text{H}|b\rangle + |1\rangle\langle 1| \otimes \text{ZH}|b\rangle) \tag{162}$$

$$= \text{I}|0\rangle\langle 0| \otimes \text{HH}|b\rangle + \text{I}|1\rangle\langle 1| \otimes \text{HZH}|b\rangle \tag{163}$$

$$= |0\rangle\langle 0| \otimes |b\rangle + |1\rangle\langle 1| \otimes \text{X}|b\rangle \tag{164}$$

$$= \begin{cases} |a\rangle \otimes |b\rangle & : a = 0 \ (\forall b \in \{0,1\}) \\ |1\rangle \otimes \text{X}|b\rangle & : a = 1 \end{cases} \tag{165}$$

$$= \text{CX}_{1;2} \tag{166}$$

$$= \begin{array}{c} |a\rangle \\ |b\rangle \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \oplus \end{array} \begin{array}{c} |a\rangle \\ |a \oplus b\rangle \end{array},$$

w dowodzie której wykorzystano dwa fakty:

- $\text{H}^2 = \text{I}$,

- $\text{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \implies \text{HZH} = \text{H}|0\rangle\langle 0|\text{H} - \text{H}|1\rangle\langle 1|\text{H} = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| = \text{X}$,

oraz warunki ortonormalności bazy $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

1.16 miary splątania kwantowego \mathcal{C} oraz τ

Rozważmy ogólny stan dwóch qubitów

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_j \sum_k \alpha_{jk} |jk\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2. \quad (167)$$

Miara concurrence jest zdefiniowana jako

$$\mathcal{C}(|\psi\rangle_{AB}) = 2|\det \alpha| = |\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}|, \quad (168)$$

lub równoważnie jako $\mathcal{C}(|\psi\rangle_{AB}) = 2\sqrt{\det(\rho_A)}$, gdzie $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \text{Tr}_B |\psi\rangle_{AB} \langle \psi|$, gdyż

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix} |\alpha_{00}|^2 & \alpha_{00}\alpha_{01}^* & \alpha_{00}\alpha_{10}^* & \alpha_{00}\alpha_{11}^* \\ \alpha_{01}\alpha_{00}^* & |\alpha_{01}|^2 & \alpha_{01}\alpha_{10}^* & \alpha_{01}\alpha_{11}^* \\ \alpha_{10}\alpha_{00}^* & \alpha_{10}\alpha_{01}^* & |\alpha_{10}|^2 & \alpha_{10}\alpha_{11}^* \\ \alpha_{11}\alpha_{00}^* & \alpha_{11}\alpha_{01}^* & \alpha_{11}\alpha_{10}^* & |\alpha_{11}|^2 \end{bmatrix} \quad (169)$$

$$\xrightarrow{\text{Tr}_B} \rho_A = \begin{bmatrix} |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 & \alpha_{00}\alpha_{10}^* + \alpha_{01}\alpha_{11}^* \\ \alpha_{10}\alpha_{00}^* + \alpha_{11}\alpha_{01}^* & |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 \end{bmatrix} \quad (170)$$

$$\xrightarrow{\det(\rho_A)} (|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)(|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2) - (\alpha_{00}\alpha_{10}^* + \alpha_{01}\alpha_{11}^*)(\alpha_{10}\alpha_{00}^* + \alpha_{11}\alpha_{01}^*) \quad (171)$$

$$\dots = |\alpha_{00}|^2|\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{01}|^2|\alpha_{10}|^2 - \alpha_{00}\alpha_{10}^*\alpha_{11}\alpha_{01}^* - \alpha_{01}\alpha_{11}^*\alpha_{10}\alpha_{00}^* \quad (172)$$

$$= (\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10})(\alpha_{00}^*\alpha_{11}^* - \alpha_{01}^*\alpha_{10}^*) = |\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}|^2. \quad (173)$$

Obliczmy 3-tangle dla uogólnionego stanu $|W\rangle \equiv \alpha|100\rangle + \beta|010\rangle + \gamma|001\rangle \in 2_A \otimes 2_B \otimes 2_C$, przy normalizacji $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

Piszemy macierz gęstości

$$\rho_{ABC} = |W\rangle\langle W| = |\alpha|^2|100\rangle\langle 100| + \alpha\beta^*|100\rangle\langle 010| + \alpha\gamma^*|100\rangle\langle 100| \quad (174)$$

$$+ \beta\alpha^*|010\rangle\langle 100| + |\beta|^2|010\rangle\langle 010| + \beta\gamma^*|010\rangle\langle 001| \quad (175)$$

$$+ \gamma\alpha^*|001\rangle\langle 100| + \gamma\beta^*|001\rangle\langle 010| + |\gamma|^2|100\rangle\langle 001|. \quad (176)$$

Zatem (rozdział 1.4)

$$\rho_{AC} = \text{Tr}_B \rho_{ABC} = \dots \quad (177)$$

$$= |\alpha|^2|10\rangle\langle 10| + \alpha\gamma^*|10\rangle\langle 01| + |\beta|^2|00\rangle\langle 00| + \gamma\alpha^*|01\rangle\langle 10| + |\gamma|^2|01\rangle\langle 01| \quad (178)$$

$$= \begin{bmatrix} |\beta|^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & |\gamma|^2 & \gamma\alpha^* & \cdot \\ \cdot & \alpha\gamma^* & |\alpha|^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (179)$$

Następnie

$$\text{eig}\{\rho_{AC}(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y})\rho_{AC}^*(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y})\} = \{4|\alpha|^2|\gamma|^2 \geq 0 \geq 0 \geq 0\} \implies \tau_{A|C} = \mathcal{C}_{A|C}^2 = 4|\alpha|^2|\gamma|^2. \quad (180)$$

Podobnie obliczamy $\tau_{A|B} = \mathcal{C}_{A|B}^2 = 4|\alpha|^2|\beta|^2$ oraz

$$\rho_A = \text{Tr}_{BC} \rho_{ABC} = \begin{bmatrix} |\beta|^2 + |\gamma|^2 & \cdot \\ \cdot & |\alpha|^2 \end{bmatrix} \implies \tau_{A|BC} = \mathcal{C}_{A|BC}^2 = 4|\alpha|^2(|\beta|^2 + |\gamma|^2), \quad (181)$$

skąd otrzymujemy $\tau_3 \equiv \tau_{A|BC} - \tau_{A|B} - \tau_{A|C} = 0$, tj. stan $|W\rangle$ charakteryzuje jedynie dwucząstkowe splątanie \longrightarrow usunięcie jednego pierścienia boromejskiego utrzymuje pozostałe dwa w splątaniu.

Podobne obliczenia można wykonać dla uogólnionego stanu

$$|\text{GHZ}\rangle \equiv \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle \in 2_A \otimes 2_B \otimes 2_C \quad : \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (182)$$

otrzymując dla $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$

$$\tau_1 = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = \frac{1}{3}(3 \times 4|\alpha|^2|\beta|^2) = 4|\alpha|^2|\beta|^2, \quad (183)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0) = 0, \quad (184)$$

$$\tau_3 = 4|\alpha|^2|\beta|^2 - 0 - 0 = 1 \quad \implies \quad \underline{\text{prawdziwe splątanie trzycząstkowe...}} \quad (185)$$

... usunięcie jednego pierścienia boromejskiego uwalnia pozostałe dwa, czyli każda redukcja stanu $|\text{GHZ}\rangle$ to stan separowalny.