Splątanie kwantowe i jego zastosowania

1050-FT000-MSP-0SKZ

zadania zaliczeniowe

Remigiusz Augusiak, Wojciech Bruzda

2024-11-29, CFT PAN, Warszawa

Zestaw I

I.1. Dane są wektory bazy obliczeniowej (bazy kanonicznej/standardowej),

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Zapisać w postaci macierzowej następujące wyrażenia: $|0\rangle\langle 0|$, $|1\rangle\langle 1|$ oraz $|0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|$.

I.2 Zapisać stan

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle_A|-\rangle_B + |-\rangle_A|+\rangle_B\Big) \tag{2}$$

w bazie obliczeniowej, gdzie $|\mp\rangle_X = \big(|0\rangle_X \mp |1\rangle_X\big)/\sqrt{2}$ dla $X \subset \{A, B\}$.

I.3 Dane są dwa stany kwantowe $|-\rangle_A$ oraz $|1\rangle_B$. Wyznaczyć stan łączny $|\psi\rangle_{AB} = |-\rangle_A \otimes |1\rangle_B$, jego normę oraz wyrazić stan $|\psi\rangle_{AB}$ w postaci wektora kolumnowego w bazie obliczeniowej.

I.4 Dany jest stan czysty

$$|\psi\rangle_{AB} = |00\rangle_{AB} + |01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \tag{3}$$

zapisany w standardowej bazie produktowej przestrzeni dwóch qubitów. Proszę znormalizować ten stan, a natępnie zapisać go w postaci Schmidta.

I.5 Wyznaczyć macierz gęstości stanu czystego

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|00\rangle_{AB} - i|10\rangle_{AB} - |12\rangle_{AB}\Big) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3, \tag{4}$$

zapisanego w bazach obliczeniowych $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A \subset \mathbb{C}^2$ oraz $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}_B \subset \mathbb{C}^3$. Następnie policzyć zredukowane macierze gęstości $\rho_A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ oraz $\rho_B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Sprawdzić, czy wyniki faktycznie przedstawiają poprawne macierze gęstości.

Pamiętamy, że baza obliczeniowa w wyższych wymiarach jest odpowiednikiem bazy kanonicznej znanej z algebry, tj.

$$|j\rangle = [0, ..., \overset{(j)}{1}, ..., 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^d \quad \text{dla} \quad j \in \{0, 1, ..., d-1\}. \tag{5}$$

Zestaw II

II.6. Sprawdzić, czy podany stan

$$\rho = \begin{bmatrix} 5/12 & -\frac{1}{3} - \frac{i}{4\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{i}{4\sqrt{3}} & 7/12 \end{bmatrix} \tag{6}$$

jest czysty. Jeżeli nie, to wyznaczyć dowolną puryfikację tego stanu.

II.7. Dane są: macierz Hadamarda i macierze Pauliego

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Obliczyć H^{-1} oraz wykazać, że $HZH = X$ oraz $HYH = -Y$.

Oczywiście, można te macierze po prostu wymnożyć i porównać obie strony (takie rozwiązanie będzie zaliczone), jednakże proszę spróbować przedstawić bardziej cywilizowany sposób na wykazanie tych równości. :)

II.8. Dany jest qubitowy pomiar rzutowy

$$\mathcal{M} = \Big\{ \, |-\rangle\langle -|, \; |+\rangle\langle +| \, \Big\}. \tag{8}$$

Upewnić się, że $\mathcal{M}$ spełnia definicję rzutowego pomiaru kwantowego, a jeśli tak, to wykonać pomiar na stanie

$$|\psi\rangle = i\sqrt{\frac{1}{6}}|0\rangle - \sqrt{\frac{5}{6}}|1\rangle. \tag{9}$$

II.9. Dany jest zbiór macierzy

$$M_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Upewnić się, że definiują one poprawny pomiar kwantowy oraz obliczyć prawdopodobieństwa otrzymania odpowiednich wyników (reguła Borna) w stanie mieszanym

$$\rho = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Otrzymane prawdopodobieństwa powinny sumować się do jedności.

II.10. Sprawdzić/wykazać, że podany stan jest separowalny

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\Big). \tag{12}$$

Zestaw III

III.11 Sprawdzić dowolną metodą (dekompozycja Schmidta, entropia von Neumanna, itp.), czy podany stan dwóch qubitów

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|00\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\Big) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \tag{13}$$

jest splątany.

III.12 Sprawdzić, czy macierze

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

dla $\gamma \in [0,1]$, poprawnie definiują mapę kwantową (warunek zachowania śladu).

III.13 Dany jest dwucząstkowy stan kwantowy w postaci macierzy gęstości

$$\rho_{AB} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & . & i & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -i & . & 1 & . & -i & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & i & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3. \tag{15}$$

Zbadać numerycznie splątanie/separowalność tego stanu korzystając z kryterium PPT. Kropki oznaczają zera dla poprawienia czytelności.

III.14 Udowodnić, że poniższy zestaw generatorów

$$\begin{cases} g_1 &= X \otimes Z \otimes Z \\ g_2 &= Z \otimes X \otimes Z \\ g_3 &= Z \otimes Z \otimes X \end{cases} \tag{16}$$

stabilizuje stan

$$|\psi\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{8}}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle\Big). \tag{17}$$

Pytanie dodatkowe: Co to za stan?

III.15 Dana jest pewna szczególna (elegancka) nierówność Bella, której funkcjonał $\mathbb{B}$ jest zapisany jako

$$\mathbb{B} = a_1(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) + a_2(b_1 - b_2 + b_3 - b_4) + a_3(b_1 - b_2 - b_3 + b_4). \tag{18}$$

Wiedząc, że klasyczne zmienne losowe a_j oraz b_k mogą przyjmować wyłącznie wartości ∓ 1, wyznaczyć największą możliwą wartość $\mathbb{B}$.

To zadanie można rozwiązać numerycznie sprawdzając wszystkie możliwości, ale szczególnie mile są widziane odpowiedzi, które uzasadnią w sposób niesiłowy, że dana wartość faktycznie jest maksymalna.